

Orthogonalität von Geraden und Ebenen

Definition:

1. Zwei Geraden sind zueinander orthogonal, wenn ihre Richtungsvektoren zueinander orthogonal sind.
2. Eine Gerade und eine Ebene heißen zueinander orthogonal, wenn ein Richtungsvektor der Geraden zu den Spannvektoren der Ebene orthogonal ist.
3. Zwei Ebenen sind zueinander orthogonal, wenn ihre Normalvektoren zueinander orthogonal sind.

Gerade, die zu einer gegebenen Geraden orthogonal ist:

$$\text{Gegeben: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4+t-1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad P(2; 3; 2)$$

Lösung:

Bestimmung einer Gleichung von E:

Da der Richtungsvektor der Geraden g Normalvektor der Ebene E ist können wir schon eine Koordinatengleichung der Ebene E aufstellen:

$$E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 = b$$

Da der Punkt P in der Ebene E liegt kann man seine Koordinaten in die Ebenengleichung einsetzen:

$$E: 2 \cdot 2 - 3 + 4 \cdot 2 = b \quad b \text{ errechnen}$$

$$\rightarrow b=9$$

Somit erhalten wir die Koordinatengleichung:

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 9$$

Die x-Werte entnimmt man aus der Geradengleichung:

$$x_1 = 5 + 2t \quad x_2 = 4 - t \quad x_3 = 6 + 4t$$

Einsetzen in die Gleichung von E:

$$2(5+2t) - (4-t) + 4(6+4t) = 9$$

$$\rightarrow 10 + 4t - 4 + t + 24 + 16t = 9$$

$$\rightarrow 21t = -21$$

$$\rightarrow t = -1$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Gerade, die zu einer gegebenen Ebene orthogonal ist:

Gegeben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P(6; 9; 4)$$

Normalvektor $\vec{n}$ von E ist ein Richtungsvektor von g. Da $\vec{n}$ orthogonal zu den Spannvektoren $\vec{t}$ und $\vec{s}$ ist ergibt sich folgendes:

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \vec{s} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix} = 0$$

LGS:

$$-\vec{n}_1 + 3\vec{n}_2 - 6\vec{n}_3 = 0$$

$$0\vec{n}_1 - 1\vec{n}_2 + 2\vec{n}_3 = 0$$

Für n_3 einen sinnvollen Wert einsetzen. In diesem Falle 1.

So erhält man als Lösung:

$$n_1 = 0 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 1$$

Die Geradengleichung wird nun aus dem Stützvektor, welcher aus dem Punkt P besteht und dem Richtungsvektor, welchen wir durch unsere n-Werte erhalten haben, erstellt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E:

Gleichsetzen der Gleichungen von E und g:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

LGS:

$$-r = -1 \quad *(-6)$$

$$3r - s - 2t = 4 \quad *(-2)$$

$$-6r + 2s - t = 2$$

$$\rightarrow 6r = 6$$

$$-6r + 2s + 4t = -2 \quad \text{Gleichung 1 + Gleichung 2}$$

$$-6r + 2s - t = 2 \quad \text{Gleichung 1 + Gleichung 3}$$

$$\rightarrow 6r = 6$$

$$0 + 2s + 4t = -2$$

$$0 + 2s - t = 8 \quad *(-1)$$

$$\rightarrow 6r = 6$$

$$0 + 2s + 4t = -2$$

$$0 - 2s + t = -8 \quad \text{Gleichung 2 + Gleichung 3}$$

$$\rightarrow 6r = 6$$

$$0 + 2s + 4t = -2$$

$$0 - 2s + 5t = -10$$

$$\rightarrow 5t = -10$$

$$\rightarrow t = -2$$

Einsetzen in die Geradengleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zueinander orthogonale Ebenen:

Gegeben:

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7 \quad 3x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

Skalarprodukt der Normalvektoren errechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 = 1$$

Das Ergebnis muss 0 ergeben, ansonsten sind die Ebenen nicht zueinander orthogonal.